Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Akli Mohand Oulhadj – Bouira –
Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées
Département d'Informatique

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة أكلي محند الحاج - البويرة
كلية العلوم والعلوم التطبيقية

Module : probabilités et statistique

Chapitre (1) : Espace des probabilités

Définition : On appelle expérience aléatoire toute expérience dont le résultat ne peut être déterminé a pr... c'est à dire qui dépend du hasard.

Exemples :

1) Lancer un dé.
2) Lancer une pièce
3) Lancer deux fois une pièce

Définition On appelle Universe de l'expérience aléatoire l'ensemble Ω des issues ou résultats possibles de l'expérience.

Les éléments de Ω se notent souvent w_i, $i=1,2,\ldots$

C'est à dire $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots\}$

Exemples :

(1) On lance une pièce, on a : $\Omega = \{P, F\}$, P = pile, F = face
$w_1 = P$, $w_2 = F$

(2) On lance deux fois une pièce.
On a : $\Omega = \{(P,P), (P,F), (F,P), (F,F)\}$

Définition : On appelle un événement toute partie de Ω.

(Ω l'ensemble des résultats de l'expérience aléatoire)

Exemple : On lance un dé, on a alors :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

A l'événement : « le chiffre obtenir est un nombre pair »

d'où $A = \{2, 4, 6\}$

Remarques :

1) L'ensemble des événements est donc l'ensemble des parties de Ω, c'est donc $\mathcal{P}(\Omega)$

2) Un événement qui toujours réalisé est appelé un évenement certain, il est donc représenté par l'ensemble Ω

3) Un événement qui n'est jamais réalisé est appelé un événement impossible, il est représenté par l'ensemble vide ϕ

4) $\{\omega\}$ est appelé un événement élémentaire.

Définition (tribu) : On di qu'une famille $\mathcal{A}$ de parties de Ω est une tribu, si :

1) $\emptyset \in \mathcal{A}$.

2) $\forall A \in \mathcal{A}, \bar{A} \in \mathcal{A}$.

3) $\forall A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{A}, \ \bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$.

Espace de probabilité:

On appelle espace de probabilité le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que:

Ω: ensemble.

$\mathcal{A}$: une tribu de parties de Ω.

P: une application de $\mathcal{A}$ dans $[0, 1]$.

$$P : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$$
$$A \longmapsto P(A)$$

qui vérifie:

a) $P(A) \geq 0, \ \forall A \in \mathcal{A}$.

b) $P(\Omega) = 1$.

c) $\forall A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ et $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$, on a:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Remarque: $P(A)$ s'appelle la probabilité de A.

On déduit les propriétés suivantes:

1) $P(\emptyset) = 0$

2) $\forall A, B \in \mathcal{A}$, on a: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$.

3) $\forall A \in \mathcal{A}, \ P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

4) si $P(A) = 0 \Rightarrow A$ événement impossible.

5) Si $P(B) = 1 \Rightarrow B$ événement certain

Théorème:

soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité (Ω fini)

Pour tout événement A, on a:

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{Nombre de Cas favorables à } A}{\text{Nombre de Cas possible}}$$

probabilité conditionnelle:

Théorème - définition:

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité, A et B deux événements tels que $P(A) > 0$

La probabilité conditionnelle de B à A (ou probabilité de B sachant que A s'est réalisé) est définie par:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

alors l'application $P_A : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$

$$B \longmapsto P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A}, P_A)$

On note aussi: $P_A(B) = P(B/A)$

Exemple: On lance un dé équilibré.

A l'événement « obtenir un nombre inférieur ou égale à 5 »

B l'événement « obtenir un nombre pair »

on a : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad , \quad B = \{2, 4, 6\}$$

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

$$P(A) = \frac{5}{6}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{3}$$

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{5}$$

ou

$$P_A(B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(A)} = \frac{2}{5}$$

Remarque ①. En généralement, $P_A(B) \neq P(B)$

Remarque ②. La définition de la probabilité conditionnelle que pour les événements A et B du tribu $\mathcal{A}$, on a :

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B/A).$$

Formule des probabilités totales :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilité

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements qui forment une partition de Ω, c'est à dire :

$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ et les A_i sont deux à deux disjoints,

on suppose que $P(A_i) \neq 0, \ \forall i = 1, \ldots, n$.

Si B est un événement, on a alors :

$$p(B) = p\left(\bigcup_{i=1}^{n}(B\cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} p(B\cap A_i)$$

En exprimant les $p(B\cap A_i)$ en fonction de $p(B|A_i)$ et $p(A_i)$, on obtient la formule des probabilités totales :

$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(B|A_i)\, p(A_i).$$

Cas particulier :

Si $n=2$, on pose : $A_1 = A$ et $A_2 = \bar{A}$, on a alors :

$\forall B \in \mathcal{A}$: $p(B) = p(A)\,p(B|A) + p(\bar{A})\,p(B|\bar{A})$.

Exemple : On a 2 une urnes.

Une contient 5 boules, 3 rouges et 2 vertes.

Une urne II contient 10 boules, 2 rouges et 8 vertes.

Quelle est la probabilités de tirer une boule rouge ?

En posant :

B : « La boule tirée est rouge »

A_1 : « tiré une boule de l'urne I »

A_2 : « tiré une boule de l'urne II »

D'après la formule des probabilités totales,

$$p(B) = p(A_1)\,p(B|A_1) + p(A_2)\,p(B|A_2)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{C_3^1}{C_5^1} + \frac{1}{2}\,\frac{C_2^1}{C_{10}^1} = 0{,}4.$$

Formule de Bayes:

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements deux à deux disjoints qui forment une partition de Ω tels que

$$P(A_i) \neq 0, \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

et B un événement tel que $P(B) > 0$, on a:

$$P(A_i | B) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(B)}, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

En utilisant la formule des probabilités totales, on obtient la formule de Bayes:

$$P(A_i | B) = \frac{P(B|A_i)\, P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)\, P(A_j)}.$$

Indépendance:

Définition: Deux événements A et B sont dits indépendants si:

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$$

Remarque:

Les événements A_1, A_2 et A_3 sont indépendants il faut vérifier que l'indépendance deux à deux a lieu:

$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\, P(A_2)$, $\quad P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) P(A_3)$

$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)\, P(A_3)$

et aussi $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\, P(A_2)\, P(A_3)$.

Exemple:

On lance un dé à 6 faces.
et on note

A l'événement « obtenir un nombre pair »

B l'événement « obtenir un nombre multiple de 3 »

On a. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{3, 6\}$$

$$A \cap B = \{6\}$$

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(A)P(B) = \frac{1}{6} = P(A \cap B)$$

d'où les événements A et B sont indépendants.

Université de Bouira **Année universitaire 2022/2023**
Faculté des sciences et des sciences appliquée **$3^{\text{ème}}$Année (SI)**
Département Informatique **Module: Probabilités et statistique**

Série d'éxercices n°1

Exercice 1: Une urne contient 6 boules rouges, 4 blanches et 8 noires. On tire, sans remise, trois de ces boules. Calculer la probabilité que :

1. Les trois boules tirées soient rouges.
2. Les trois boules tirées soient noires.
3. Deux boules soient rouges et une blanche.
4. Une boule soit rouge, une blanche et une noire.
5. Au moins une soit blanche.
6. Les boules soient tirées dans l'ordre ; rouge, noir, blanche.

Exercice 2:

1. Montrer que $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P_A(\cdot))$ est un espace de probabilté où $A \in \mathcal{A}$. Sachant que $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ est un espace de probabilté.
2. Soit A un événement tel que $P(A) = 1$ (A n'est pas nécessairement Ω). Montrer que pour tout événment $B \in \mathcal{A}$, on a $P(A \cup B) = 1$.

Exercice 3: Un urne contient 12 boules, 5 boules vertes et 7 boules bleues. Nous avons tiré deux boules à la fois (sans remise et sans tenir compte de l'ordre). Quelle est la probabilité qu'ils soient bleus?

Exercice 4: Trois machines M_1, M_2, M_3 réalisent respectivement 40%, 35%, 25% de la production d'une usine. Supposons que 2%, 4% et 5% de ces machines soient malles produites. Nous avons pris un échantillon de cette production et nous l'avons trouvé médiocre. Quelle est la probabilité qu'il soit produit par la machine M_1?

Exercice 5: Soient A et B deux évènements d'un même espace de probabilité $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ tels que: $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{2}{3}$. Calculer $P(A \cup B)$ dans les deux cas suivants:

1. Les événements A et B sont indépendants.
2. $P(A \mid B) = \frac{1}{5}$.

Exercice 6: A l'Université, parmi les étudiants 40% suivent l'option A_1, 30% suivent l'option A_2 et 30% suivent l'option A_3. Chaque étudiant suive une seule option. La proportion d'étudiants qui n'ont pas la moyenne dans l'option A_1 est de 10%, dans l'option A_2 de 5% et dans l'option A_3 de 5%. On choisit un etudiant au hasard.

1. Calculer la probabilité qu'il n'ait pas la moyenne.
2. Sachant qu'il n'a pas la moyenne, calculer la probabilité à posteriori qu'il ait suivi l'option A_1, A_2 ou A_3.